ΜΙΑ ΝΕΑ ΚΛΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ ΚΑΘΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΧΩΡΩΝ BANACH

ΚΑΜΠΟΥΚΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ–ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΑΣ

Πρόταση 1. *Έστω X υπόχωρος ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου K. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχει ακολουθία K_n, $n \in \mathbb{N}$ συμπαγών υποσυνόλων του K τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X και $x \in K \setminus X$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subseteq K_n$ και $x \notin K_n$.*

(ii) *Υπάρχουν συμπαγή υποσύνολα B_s, $s \in S$ του K και υποσύνολο Σ' του Σ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με*

$$L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n} \subseteq X \quad \text{και} \quad X = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\sigma|n}$$

(iii) *Υπάρχει υποσύνολο Σ' του Σ και άνω ημισυνεχής συνάρτηση $F : \Sigma' \to \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του X να υπάρχει $\sigma \in \Sigma'$ με $L \subseteq F(\sigma)$. Ειδικότερα $X = F(\Sigma')$.*

Ορισμός 2. Ένας τ.χ. X καλείται *ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος (SCD)* αν υπάρχει ένας τ.χ. K τέτοιος ώστε $X \subseteq K$ και οι συνθήκες της προηγούμενης πρότασης να ικανοποιούνται.

Παρατήρηση 3. (i) Η παραπάνω πρόταση ισχύει αν αντί για ζεύγη (L, x), με L συμπαγές υποσύνολο του X και $x \in K \setminus X$, στη συνθήκη (i), θεωρήσουμε ζεύγη (u, x) με $u \in X$ και $x \in K \setminus X$ (και ανάλογες μετατροπές στις συνθήκες (ii) και(iii)). Στην περίπτωση αυτή έχουμε την κλασική έννοια του Αριθμήσιμα Καθοριζόμενου χώρου.
(ii) Σημειώνουμε επίσης ότι αν οι συνθήκες (ii) κα (iii) ικανοποιούνται από το Σ αντί του Σ' τότε έχουμε την έννοια του ισχυρά $\mathcal{K}$-αναλυτικού τοπολογικού χώρου που εισάγεται από τους Μερκουράκη – Σταμάτη.

Παραδείγματα 4. (i) Κάθε ισχυρά $\mathcal{K}$–αναλυτικός τοπολογικός χώρος είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.
(ii) Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Date: 28/05/2010.

(iii) Ένας $\mathcal{K}$–αναλυτικός χώρος δεν είναι κατ' ανάγκη ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος. Έστω Γ ένα σύνολο με $|\Gamma| = c$ (την ισχύ του συνεχούς) και $X = [\Gamma]^{<\omega}$ (το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του Γ),θεωρούμενο ως υπόχωρος του συμπαγούς χώρου $\{0,1\}^{\Gamma}$. Ο χώρος X είναι σ-συμπαγής (ειδικότερα $\mathcal{K}$–αναλυτικός), διότι μπορεί να γραφεί στη μορφή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\Gamma]^{\leq n}$, όπου $[\Gamma]^{\leq n}$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του Γ με $|A| \leq n$, ενώ δεν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Βασικές ιδιότητες

(i) Κλειστός υπόχωρος ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.
(ii) Αριθμήσιμο γινόμενο ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενων χώρων είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.
(iii) Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.
(2) Ο χώρος $(\mathcal{K}(X), \tau_\nu)$ είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.
(3) Ο χώρος $(\mathcal{K}(X), \tau_\nu)$ είναι αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

(iv) Συνεχής εικόνα ενός ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενου χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Μια συνεχής απεικόνιση $f\colon X \to Y$ λέγεται compact covering αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο L του Y υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του X τέτοιο ώστε να ισχύει $f(K) = L$.

Αν η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ είναι compact covering και ο χώρος X είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος, τότε ο Y είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος.

Ορισμός 5. Ένας χώρος Banach λέγεται *ασθενώς ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος* (SWCD) αν είναι ισχυρά αριθμήσιμα καθοριζόμενος στην ασθενή του τοπολογία.

Ένας χώρος Banach X είναι SWCD αν και μόνον αν ο χώρος (B_X, w) είναι SCD.

Παραδείγματα 6. (i) Κάθε SWKA χώρος Banach είναι SWCD, επομένως και κάθε SWCG χώρος Banach. Ειδικότερα κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach με την ιδιότητα Schur.
(ii) Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach με διαχωρίσιμο δυϊκό.

Χαρακτηρισμός χώρων Banach SWCD

Πρόταση 7. *Έστω X χώρος Banach. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Ο χώρος X είναι SWCD

(2) Υπάρχει ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος M και μια οικογένεια $\{W_K : K \in \mathcal{K}(M)\}$ ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:

- *Αν K_1, $K_2 \in \mathcal{K}(M)$ με $K_1 \subseteq K_2$, τότε $W_{K_1} \subseteq W_{K_2}$*
- *Για κάθε L ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X υπάρχει $K \in \mathcal{K}(M)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq W_K$.*

Θεώρημα 8. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach, ο οποίος δεν περιέχει τον ℓ^1. Τότε ο X^* είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν ο X είναι SWCD.*

Πόρισμα 9. *Κάθε χώρος Banach X SWCD, ο οποίος δεν περιέχει τον ℓ^1 είναι Asplund, κατά συνέπεια WCG.*

Αθροίσματα χώρων Banach SWCD

Πρόταση 10. *Έστω (X_n) μια ακολουθία χώρων Banach SWCD και $p \geq 1$. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_p$ είναι SWCD.*

Δε γνωρίζουμε αν ένα c_0- άθροισμα χώρων Banach SWCD είναι SWCD. Έχουμε όμως την ακόλουθη ειδική περίπτωση.

Πρόταση 11. *Έστω (X_n) μια ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach SWCD και κάθε X_n έχει διαχωρίσιμο δυϊκό ή έχει την ιδιότητα Schur. Τότε ο χώρος $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_0$ είναι SWCD.*

Θεώρημα 12. *Για κάθε $\xi < \omega_1$ θεωρούμε ένα χώρο Banach E_ξ με μια νορμαρισμένη Schauder βάση $(e_{(n,\xi)})$, η οποία δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο χώρος Banach $E = (\sum_{\xi<\omega_1} \oplus E_\xi)_p$, όπου $p = 0$ ή $p > 1$ είναι WCG, αλλά όχι SWCD.*

Πόρισμα 13. *Ο χώρος Banach $c_0(\omega_1)$ δεν είναι SWCD.*

Θεώρημα 14. *Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Τότε ο χώρος $C(K)$ είναι SWCD αν μόνον αν το K είναι αριθμήσιμο.*